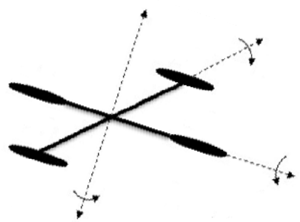
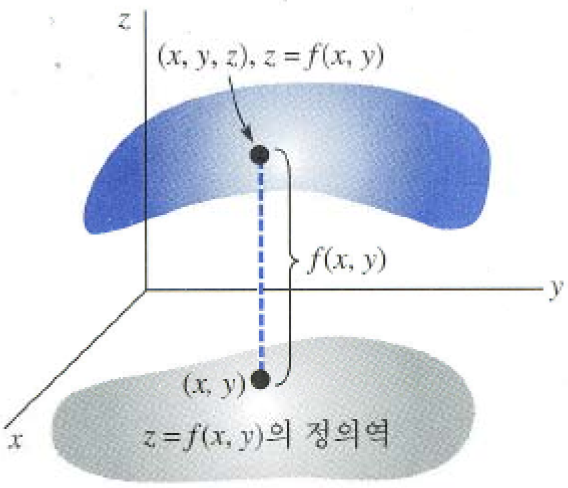
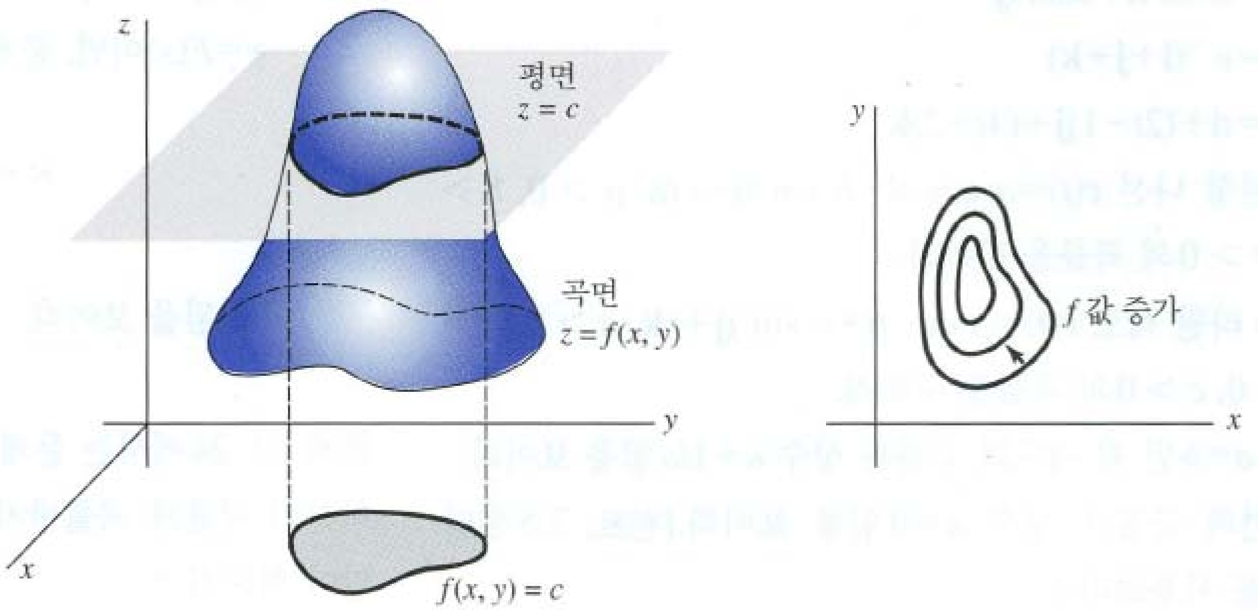
9장 벡터의 미적분
(3)



- 편도함수



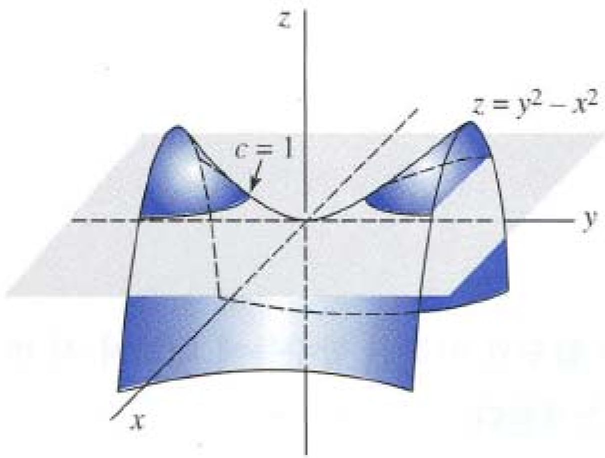


(a) 곡면

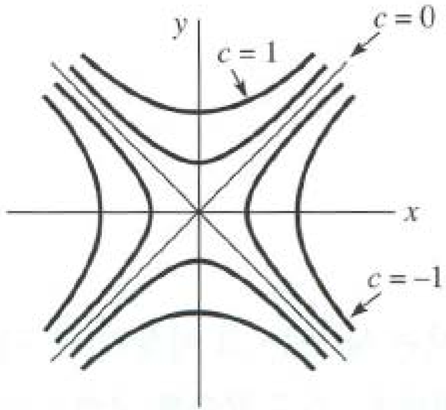
(b) 등위곡선

예제 1 등위곡선

함수 $f(x, y)=y^2-x^2$의 등위곡선은 $y^2-x^2=c$이다. 그림 9.23과 같이 $c>0$ 또는 $c<0$일 때 이러한 곡선의 모임(곡선군)은 쌍곡선이며 $c=0$이면 직선 $y=x$와 $y=-x$를 얻는다.

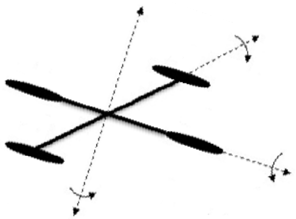


(a) 곡면



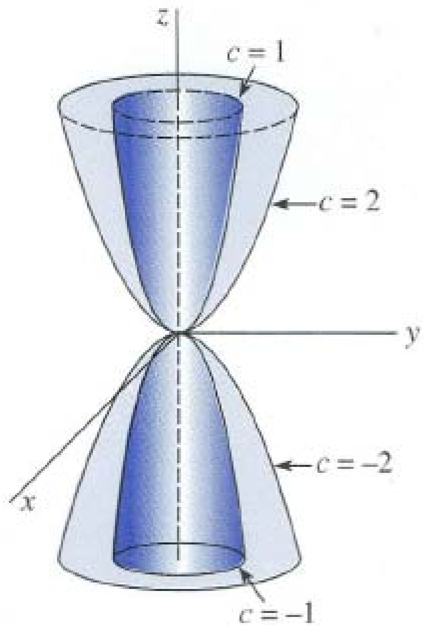
(b) 등위곡선

그림 9.23 예제 1의 곡면과 등위곡선 ❑



예제 2 등위곡면

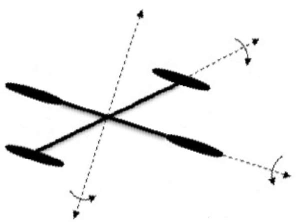
함수 $F(x, y, z)=(x^2+y^2)/z$의 등위곡면을 구하라.



풀이 $c \neq 0$에 대하여 등위곡면은

$$\frac{x^2+y^2}{z}=c \quad \text{또는} \quad x^2+y^2=cz$$

이며, 이는 포물면(paraboloid)이다. 곡면군 중 몇 개가 그림 9.24에 나와 있다. ❑



$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}$$

$\partial z/\partial x$를 계산할 때는 y를 상수로 생각하고 일반적인 미분법칙을 사용한다.

$\partial z/\partial y$를 계산할 때는 x를 상수로 생각하고 일반적인 미분법칙을 사용한다.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x \text{ 그리고 } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y$$

예제 3 편도함수

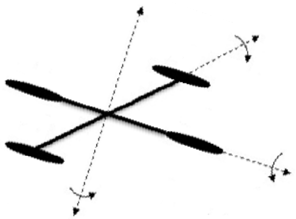
$z=4x^3y^2-4x^2+y^6+1$ 에 대하여 $\partial z/\partial x$ 와 $\partial z/\partial y$ 를 구하라.

풀이 y 를 고정하여 상수로 생각하면

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2y^2 - 8x$$

이고, 마찬가지로 x 를 상수로 생각하면

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 8x^3y + 6y^5$$



2계 편도함수:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ 그리고 } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

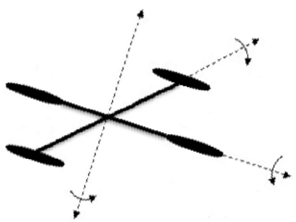
3계 편도함수:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \text{ 그리고 } \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

혼합 2계 편도함수:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ 그리고 } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \text{ 그리고 } f_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

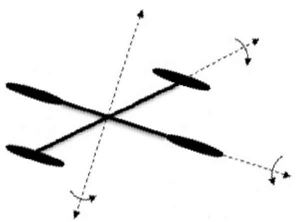


예제 4 **편도함수**

$F(x, y, t) = e^{-3\pi t} \cos 4x \sin 6y$의 x, y, t에 대한 편도함수는 각각

$$F_x(x, y, t) = -4e^{-3\pi t} \sin 4x \sin 6y$$
$$F_y(x, y, t) = 6e^{-3\pi t} \cos 4x \cos 6y$$
$$F_t(x, y, t) = -3\pi e^{-3\pi t} \cos 4x \sin 6y$$

이다. ❑



정리 9.5 **연쇄법칙**

$z=f(u, v)$가 미분 가능하고 $u=g(x, y)$, $v=h(x, y)$에 대해 연속인 1계 편도함수가 존재하면

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \tag{5}$$

이다.

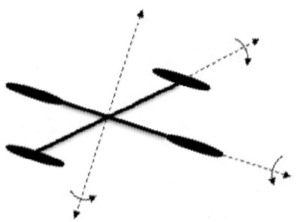
예제 5 연쇄법칙

$z=u^2-v^3$이고 $u=e^{2x-3y}$, $v=\sin(x^2-y^2)$일 때 $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$를 구하라.

풀이 $\partial z/\partial u=2u$, $\partial z/\partial v=-3v^2$이므로 (5)에서

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u(2e^{2x-3y})-3v^2[2x\cos(x^2-y^2)]=4ue^{2x-3y}-6xv^2\cos(x^2-y^2) \qquad (6)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u(-3e^{2x-3y})-3v^2[(-2y)\cos(x^2-y^2)]=-6ue^{2x-3y}+6yv^2\cos(x^2-y^2) \qquad (7)$$



■ 특수한 경우 $z=f(u, v)$가 미분 가능하고 $u=g(t)$, $v=h(t)$가 단일 변수 t에 대해 미분 가능한 함수이면 정리 9.5는 상미분 dz/dt가

$$\boxed{\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}} \tag{8}$$