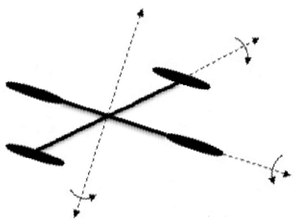
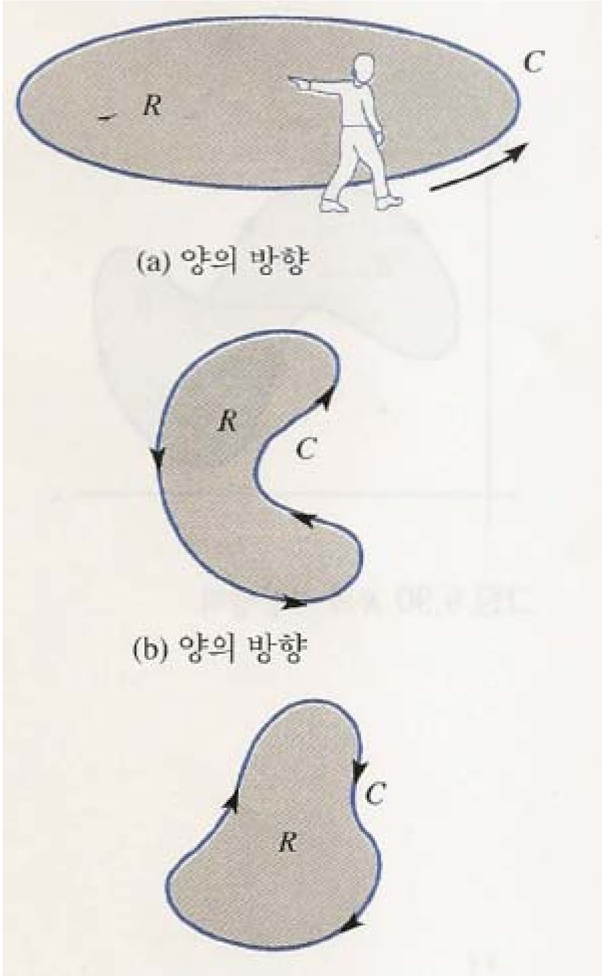
9장 벡터의 미적분
(10)



- Green 정리

$$\oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy,\ \oint_C P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,\ \oint_C F(x,y)\,ds$$

기호 $\oint_C$ 와 $\oint_C$ 는 각각 양의 방향과 음의 방향의 선적분



(a) 양의 방향

(b) 양의 방향

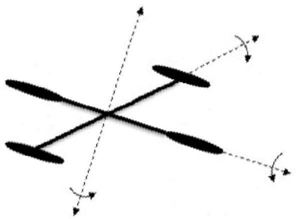
(c) 음의 방향

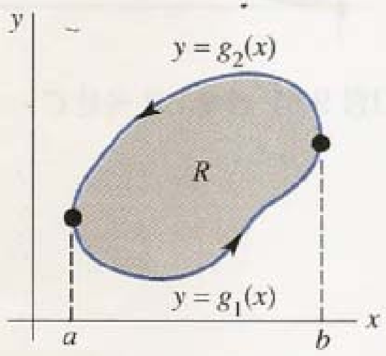
정리 9.13 **Green의 정리—평면***

C가 영역 R을 둘러싸는 조각별 매끄러운 단순 폐곡선이고 P, Q, $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$가 R에서 연속이면

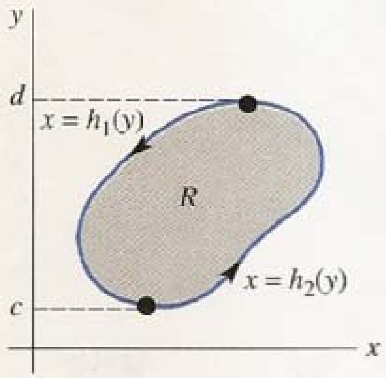
$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \tag{1}$$

이다.





(a) I형 영역 R



(b) II형 영역 R

부분 증명 영역 R이 I형과 II형

$$R\colon g_1(x) \le y \le g_2(x), \qquad a \le x \le b$$

$$R\colon h_1(y) \le x \le h_2(y), \qquad c \le y \le d$$

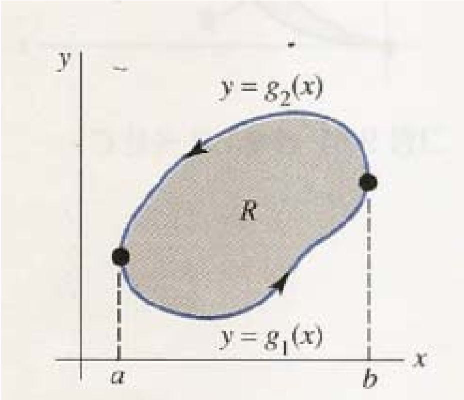
인 경우에 대해 (1)을 증명해 보자. 그림 9.89(a)에서

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dA = -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\, dx$$

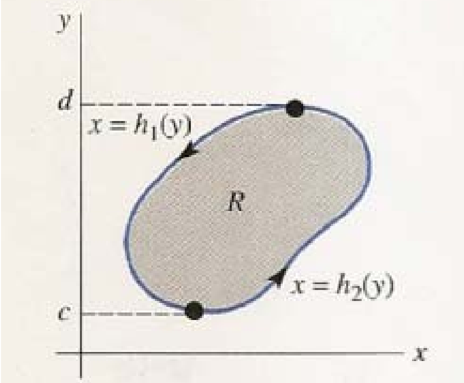
$$= -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\, dx$$

$$= \int_a^b P(x, g_1(x))\, dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\, dx$$

$$= \oint_C P(x, y)\, dx$$



(a) I형 영역 R



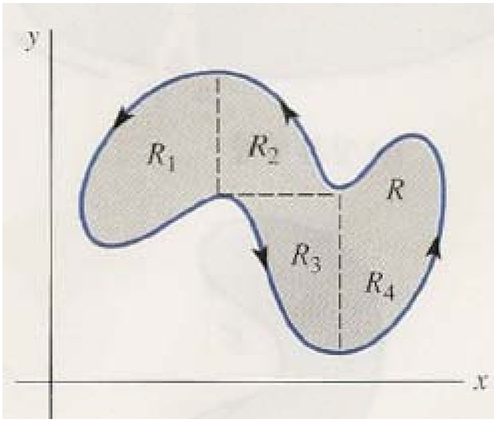
(b) II형 영역 R

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

$$= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\,dy$$

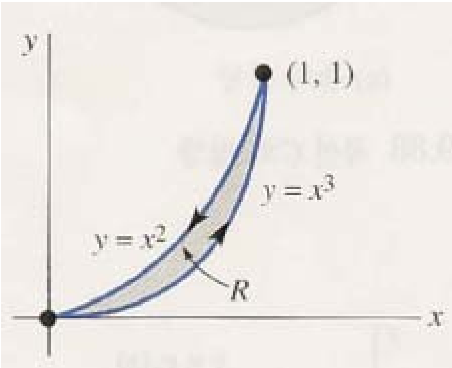
$$= \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\,dy$$

$$= \oint_C Q(x, y)\,dy$$



예제 1 Green 의 정리 사용

C가 $y=x^2$과 $y=x^3$으로 둘러싸인 제1사분면의 영역의 경계일 때, $\oint_C (x^2-y^2)\,dx+(2y-x)\,dy$를 계산하라.



풀이 $P(x, y)=x^2-y^2$, $Q(x, y)=2y-x$이면, $\partial P/\partial y=-2y$이고 $\partial Q/\partial x=-1$이다. (1)과 그림 9.91에서

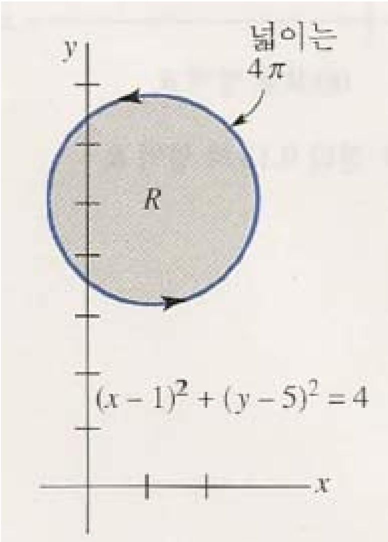
$$\oint_C (x^2-y^2)\,dx+(2y-x)\,dy=\iint_R (-1+2y)\,dA$$

$$=\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}(-1+2y)\,dy\,dx$$

$$=\int_0^1 (-y+y^2)\Big]_{x^3}^{x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 (-x^6+x^4+x^3-x^2)\,dx=-\frac{11}{420}$$

이다.



예제 2 Green의 정리 사용

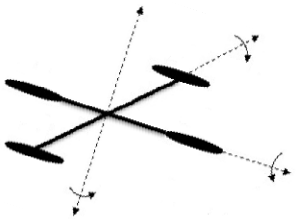
C가 원 $(x-1)^2+(y-5)^2=4$일 때 $\oint_C (x^5+3y)\,dx+(2x-e^{y^3})\,dy$를 계산하라.

풀이 $P(x, y)=x^5+3y$와 $Q(x, y)=2x-e^{y^3}$이라 하면 $\partial P/\partial y=3$이고 $\partial Q/\partial x=2$이다. 따라서 (1)에서

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = \iint_R (2 - 3)\,dA = -\iint_R dA$$

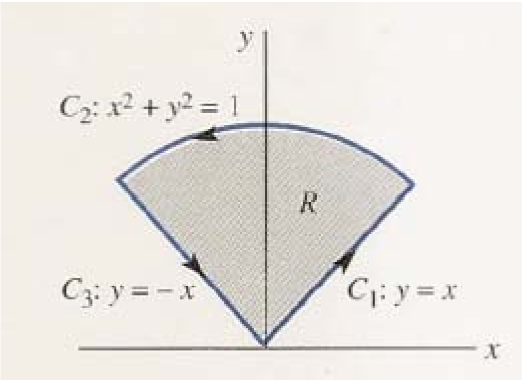
이다. 이중적분 $\iint_R dA$는 그림 9.92에 나와 있듯이 반지름 2인 원에 의하여 둘러싸인 영역 R의 넓이가 $\pi 2^2=4\pi$이므로

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = -4\pi$$



예제 3 힘이 한 일

그림 9.93의 단순 폐곡선 C를 따라 힘 $\mathbf{F}=(-16y+\sin x^2)\mathbf{i}+(4e^y+3x^2)\mathbf{j}$가 한 일을 구하라.



풀이 9.8절의 (12)로부터 $\mathbf{F}$에 의한 일은

$$W=\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C(-16y+\sin x^2)\,dx+(4e^y+3x^2)\,dy$$

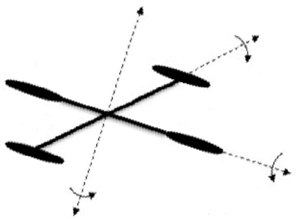
이고, Green의 정리에 의해 $W=\iint_R(6x+16)\,dA$이다. 영역 R의 형태로 보아 극좌표계를 사용하는 것이 편리하므로 R을 $0\le r\le 1$, $\pi/4\le\theta\le 3\pi/4$로 나타내면

$$W=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^1(6r\cos\theta+16)\,r\,dr\,d\theta$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(2r^3\cos\theta+8r^2)\Big]_0^1\,d\theta$$

$$=\int_{\pi/4}^{3\pi/4}(2\cos\theta+8)\,d\theta=4\pi$$

가 된다. ❑

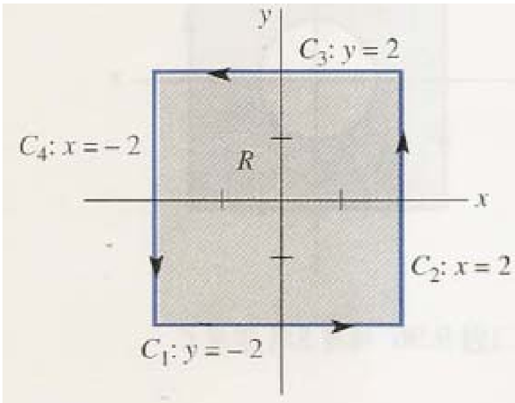


예제 4 Green의 정리가 적용되지 않는 경우

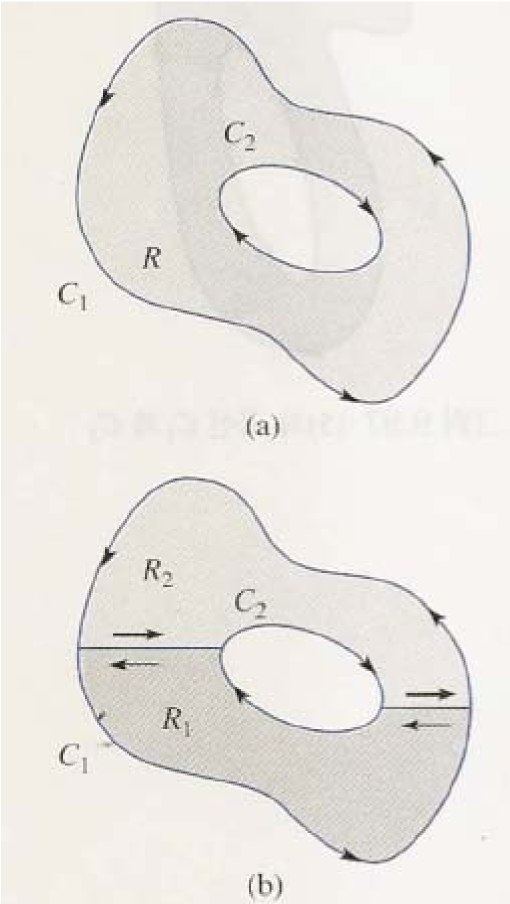
C가 그림 9.94의 4개의 선분 C_1, C_2, C_3, C_4로 구성된 폐곡선이라 하자. 이때는 선적분

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

에 Green의 정리를 적용할 수 없다. 왜냐하면 P, Q, $\partial P/\partial y$와 $\partial Q/\partial x$가 영역에 포함되는 원점에서 연속이 아니기 때문이다. ❑



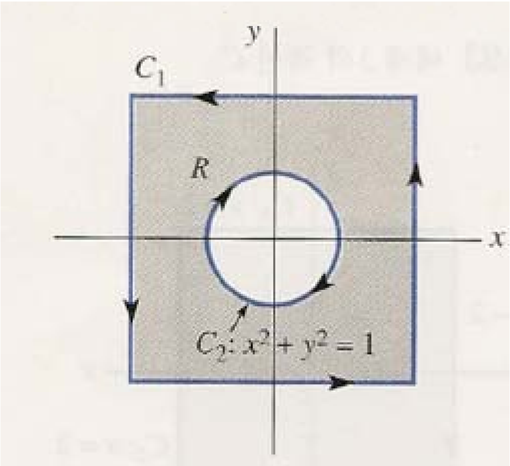
- Green 정리 - 확장



$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

$$= \oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

$$= \oint_C P\,dx + Q\,dy$$



예제 5 구멍이 포함된 영역

$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$ 를 계산하라. 여기서 $C = C_1 \cup C_2$는 그림 9.96에서 어둡게 칠해진 영역의 경계이다.

풀이

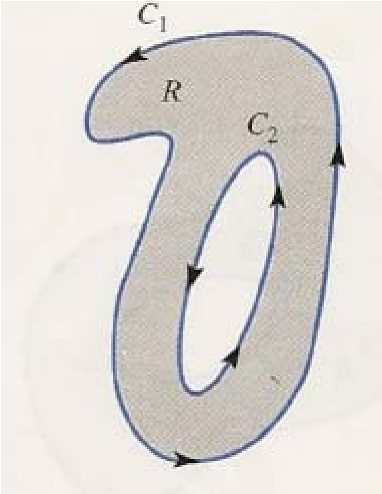
$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

이 C가 경계인 영역 R에서 연속이기 때문에, Green의 정리가 성립하므로

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \iint_R \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dA = 0$$

이다. ❑



$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{-C_2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy$$

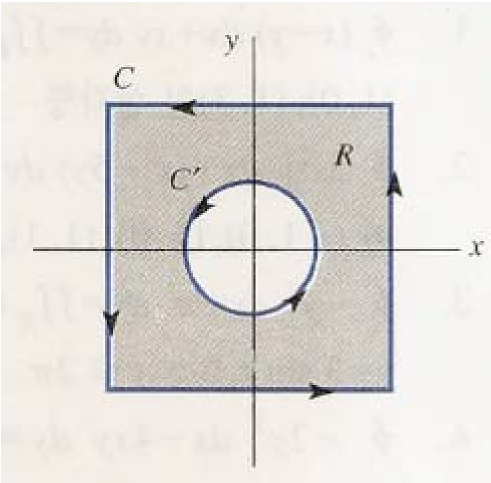
예제 6 **다시 보는 예제 4**

예제 4의 선적분을 계산하라.

풀이 선적분을 계산하기 위해서는

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

로 쓰고 각각의 직선 경로 C_1, C_2, C_3, C_4에 대해 선적분을 계산하여야 한다. 여기서는 다른 방법을 사용한다. 원 C': $x^2+y^2=1$이 완전히 C 안에 놓이므로(그림 9.98) 예제 5로부터 C와 C'이 경계가 되는 영역 R에서 $P=-y/(x^2+y^2)$와 $Q=x/(x^2+y^2)$는 연속인 1계 편도함수를 가지며 또한



$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

이 성립한다. 따라서 (5)로부터

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \oint_{C'} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

가 되고, 새로운 곡선 C'의 매개방정식 $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$를 이용하면

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy &= \int_0^{2\pi} [-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)] \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt \qquad (6) \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\end{aligned}$$

이다. □