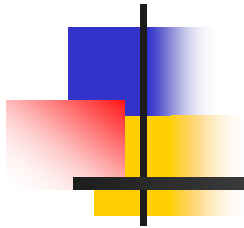
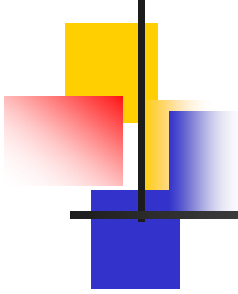


곡선의 표현 및 조작



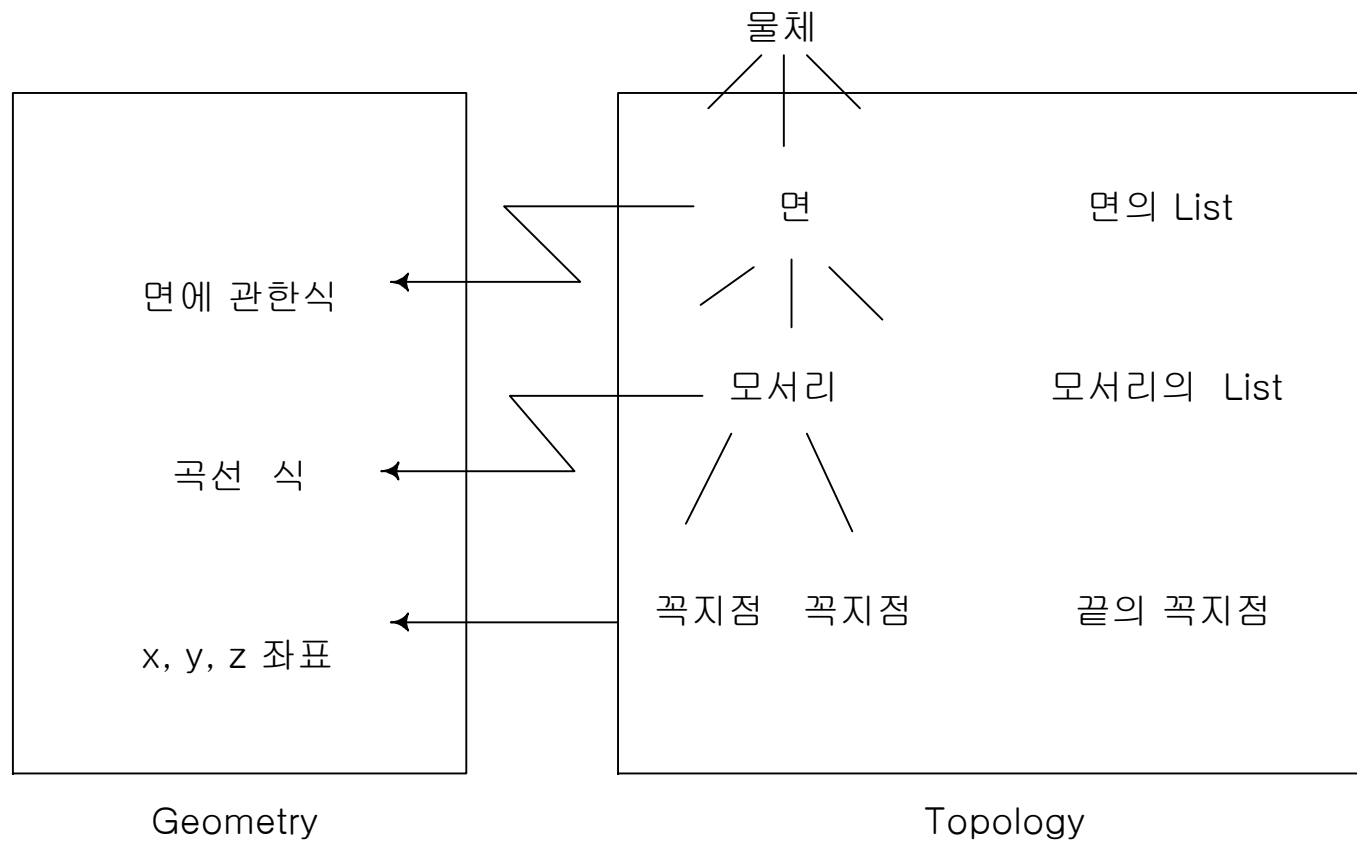


수학적 표현 ?

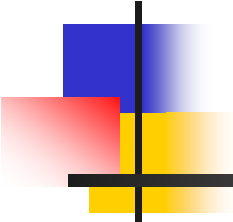
- 무엇을 저장하나 ?
 - 곡선의 방정식 혹은
 - 곡선의 특성값 : 중심점, 반지름, 등등...
- 요구되는 작업
 - 위의 점, 선 얻기
 - 경계점, 경계선 얻기
 - 면과면의 교차선 계산
 - 접선방향, 법선방향 얻기 등

자료구조의 한 부분

■ 자료구조의 geometry(기하) 부분

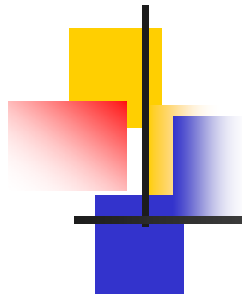


Topology (위상정보). Vs Geometry (기하정보)



수학적 표현의 분류

비매개변수 식
매개변수 식



수학적 표현식의 분류

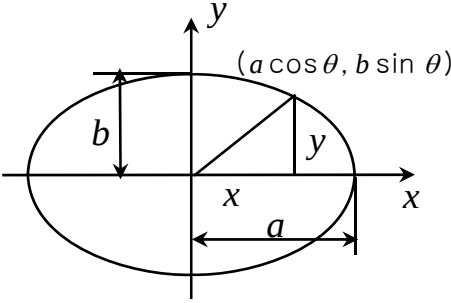
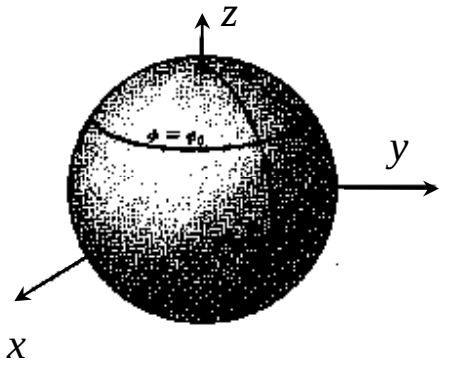
- 비매개 변수식 (non-parametric equation)
 - 음 함수 (implicit form)
 - 양 함수 (explicit form)
- 매개 변수식 (parametric equation)



수학적 표현식의 분류

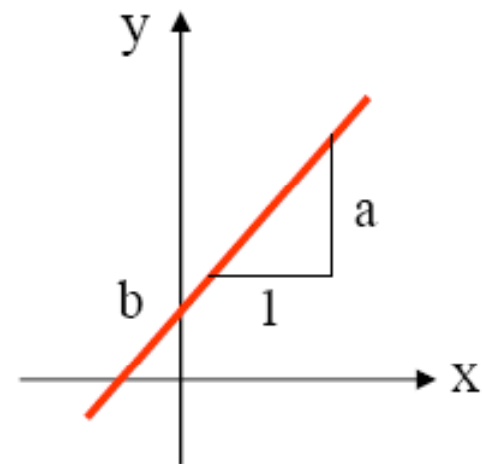
대상	양 함수식 표현 (explicit form)	음 함수식 표현 (implicit form)	매개 변수식 표현 (parametric form)
이차원 평면 곡선	$y = f(x)$	$f(x, y) = 0$	$r(t) = (x(t), y(t))$
삼차원 공간 곡선	$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = g(x, y) \end{cases}$	$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$	$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$
곡면	$z = f(x, y)$	$f(x, y, z) = 0$	$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$

분류별 표현 예

	양함수식 표현	음함수식 표현	매개변수식 표현
	$y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$ $y = -b\sqrt{1 - x^2/a^2}$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$	$r(\theta) = \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ b \sin \theta \end{pmatrix}$ $0 < \theta < 2\pi$
	$z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ $z = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$	$r(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \cos \phi \cos \theta \\ r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$

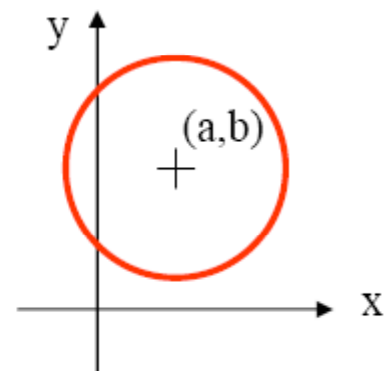
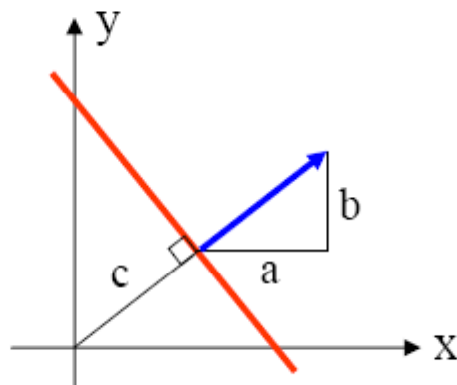
양함수식

- $y = f(x)$
 - 양함수식(explicit equation)
 - 양함수형태(explicit form)
 - x 가 주어지면 쉽게 y 를 구할 수 있다.
- 직선
 - $y = ax + b$
 - 절편이 b
 - x 가 0일 때 y 는 b
 - 기울기가 a
 - x 가 1갈 때 y 는 a 만큼 이동



음함수식

- $f(x,y) = 0$
 - 음함수식(implicit equation)
 - 음함수형태(implicit form)
 - 접선(tangent), 법선(normal)등을 구하기 쉽다.
 - 점이 곡선의 어느 쪽(내부, 외부 혹은 왼쪽, 오른쪽)에 있는지 판정하기 쉽다.
- 직선
 - $ax + by - c = 0$
 - 원점에서 c 만큼 떨어져 있고
 - 단위 법선 벡터가 (a, b)
- 원
 - $(x-a)^2 + (y-a)^2 = r^2$
 - 중심이 (a, b) 에 있고
 - 반경이 r



원추곡선 – 비매개변수식

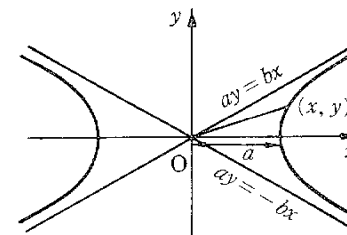
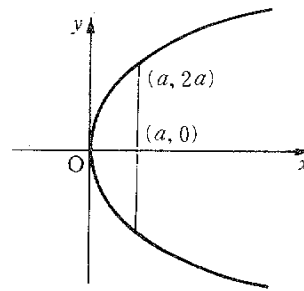
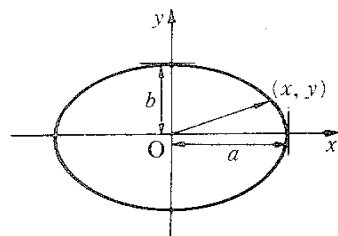
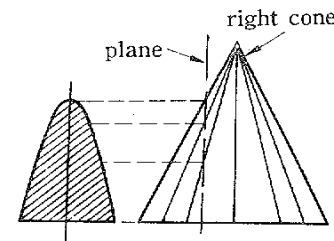
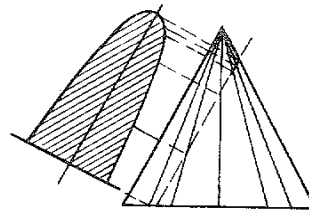
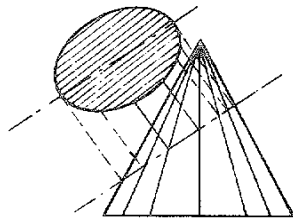
Line(직선): $ax + by - c = 0$

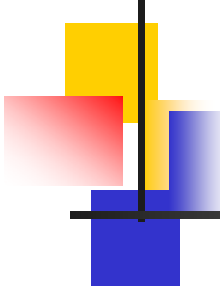
Circle(원): $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

Ellipse(타원): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

Parabola(포물선): $y^2 - 4ax = 0$

Hyperbola(쌍곡선): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$





비 매개변수 식의 장단점

■ 장점:

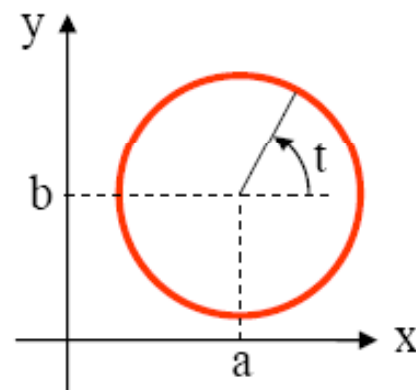
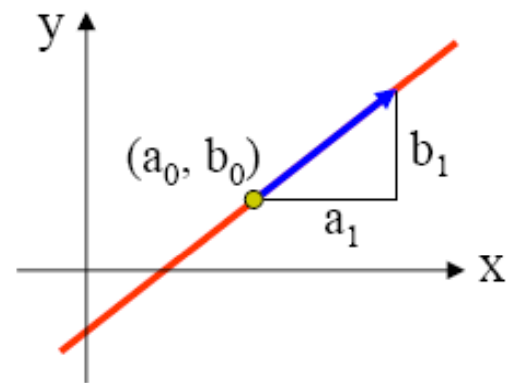
- 특별한 경우 직관적 해석이 편리하다
- 예 : $y = ax \rightarrow$ 직선
 $y = ax^2 \rightarrow$ 포물선

■ 단점:

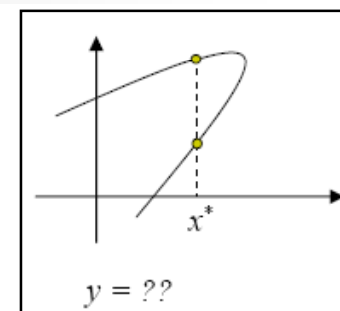
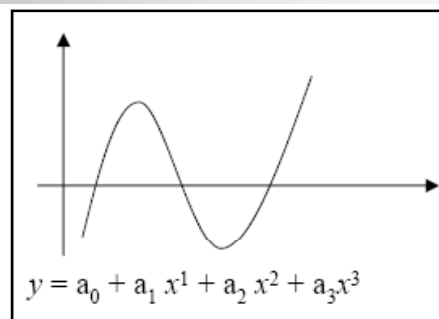
- 하나의 형상 식이 좌표계에 의하여 변화되거나 표현할 수 없는 경우가 생긴다. $\rightarrow$ 매개변수 식으로 표현!!
- 좌표계가 달라지면 형상 표현에 현실적인 어려움이 있다. $\rightarrow$ 카르테시안 좌표계를 극좌표계로 바꿀 때..
- 곡선이나 곡면이 평면에 있지 않거나 경계가 주어진 경우에는 그 표현이 어렵거나 불가능 하다.

매개변수식

- $x = f(t)$, $y = g(t)$
 - 매개변수식(parametric equation)
 - 매개변수형태(parametric form)
 - 매개변수 t 를 매개로 x, y 를 얻는다.
- 직선
 - $x = a_0 + a_1 t$, $y = b_0 + b_1 t$
 - t 가 0일 때 (a_0, b_0) 를 지나고
 - x 가 a_1 갈 때 y 가 b_1 만큼 이동
- 원
 - $x = a + r \cos(t)$, $y = b + r \sin(t)$
 - 중심이 (a, b) 에 있고
 - 반경이 r



CAD시스템은 왜 매개변수식을 쓰나 ?

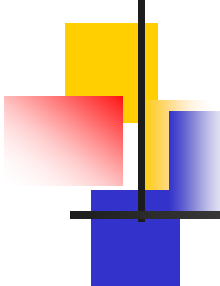


- $y = f(x)$: 양함수식은
 - 곡선상의 점을 순차적으로 계산할 수도 있고,
 - 차수를 높여 복잡한 곡선을 만들 수는 있다.
 - 그러나 하나의 x 값에 대해 둘 이상의 y 값을 갖는 곡선을 하나의 식으로 표현 곤란
 - 예: 원의 경우 두 개의 식으로 표현된다.
- $g(x, y) = 0$: 음함수식은
 - 곡선상의 점을 순차적으로 계산할 수 없다.
- $x = f(t), y = g(t)$: 매개변수식은
 - 매개 변수를 통해 곡선상의 점을 순차적으로 계산할 수 있고,
 - 차수를 높여 복잡한 곡선도 만들 수 있으며,
 - 구간(곡선의 범위) 정의가 용의하며,
 - 접선, 법선 등의 계산도 용이하다.



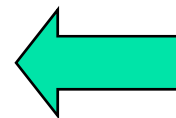
다항함수

- 모든 스플라인의 기본 표현방식
- 비매개변수형
- 매개변수형



다항함수 – 비매개변수, 양함수

- 다항식
 - Polynomial equation
 - 여러 개의 항(단항식)이 덧셈과 뺄셈으로 맺어진 식
- 1차식
 - $y = a_0 + a_1x$
- 2차식
 - $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$
- 3차식
 - $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$
- 4차식
 - $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$
- 다항식의 차수(degree)
 - 다항식에서 차수가 가장 큰 항의 지수 값



양함수 형태(익숙)



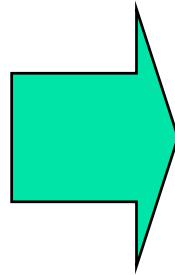
다항함수 – 매개변수 형태

일반형

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$



t 가 결정되면 x, y, z 가 결정

1차식

$$x = a_0 + a_1 t$$

$$y = b_0 + b_1 t$$

$$z = c_0 + c_1 t$$

2차식

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$$

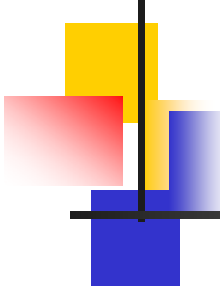
$$z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$$

3차식

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

$$y = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$$

$$z = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$$



매개변수 3차 다항식의 표기

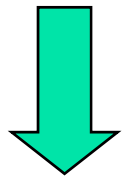
- Scalar form

$$x(u) = a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3$$

$$y(u) = a_{0y} + a_{1y}u + a_{2y}u^2 + a_{2y}u^3$$

$$z(u) = a_{0z} + a_{1z}u + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3$$

$$0 \leq u \leq 1$$

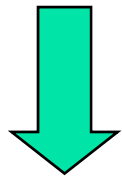


- Vector form

$$r(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3$$

$$= \sum_{i=0}^3 u^i a_i$$

$$0 \leq u \leq 1$$



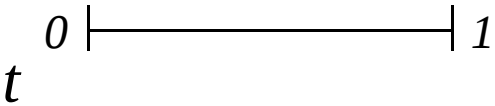
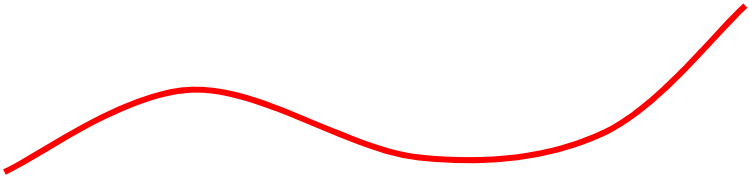
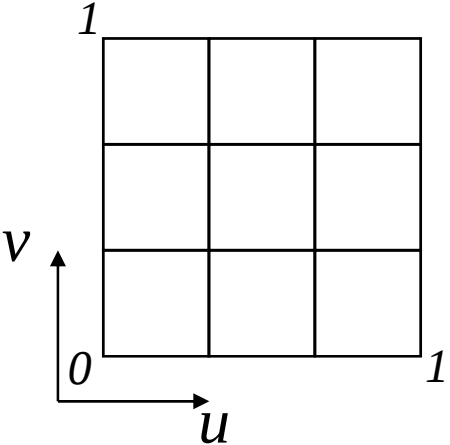
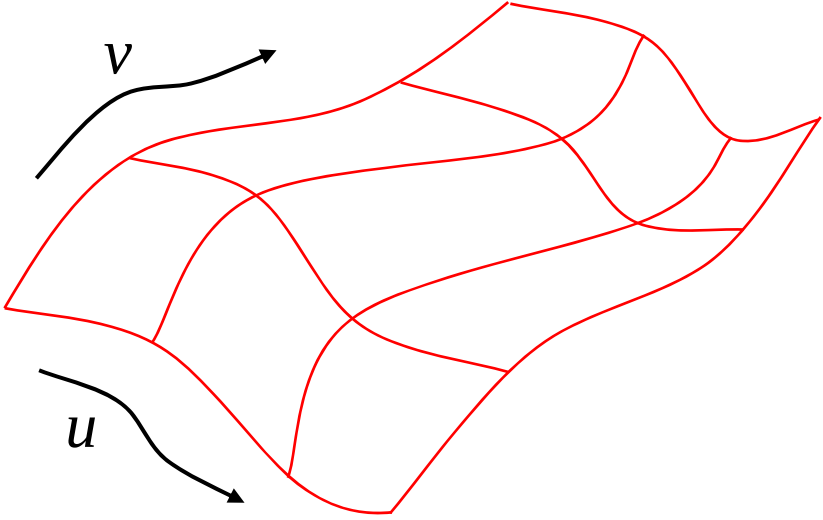
- Matrix form

$$r(t) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = UA$$

$$0 \leq u \leq 1$$

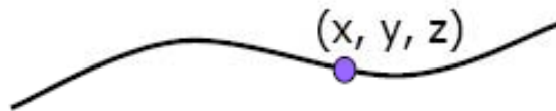


파라미터 도메인

	파라미터 domain	Cartesian Space
곡선		
곡면		

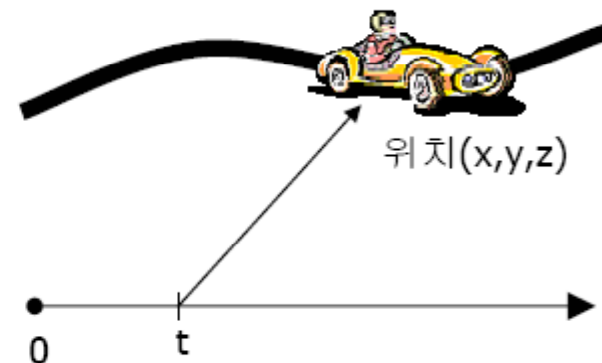
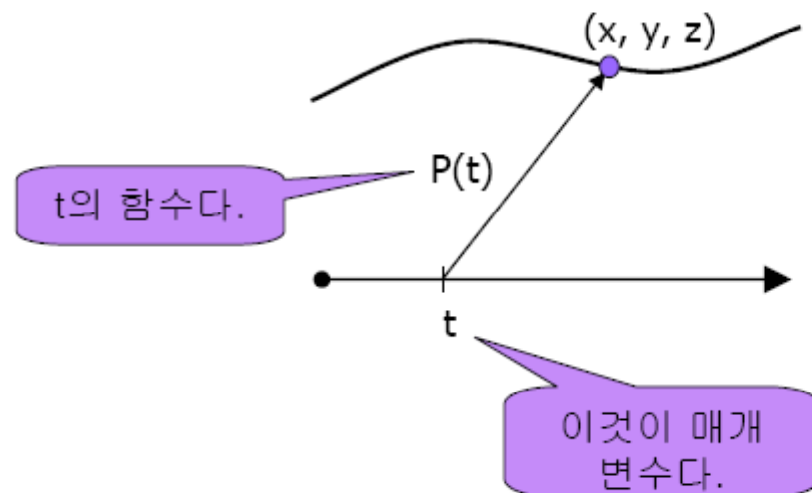
좋은 곡선

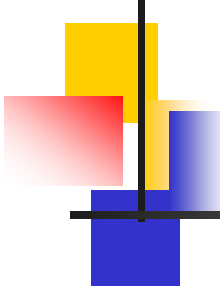
- 곡선
 - 점(P; 3D에서 x, y, z 로 표현)의 이동 궤적
 - *자동차가 지나간 길*
- 부드러운 곡선
 - 접선 벡터의 크기(속력)와 방향이 갑자기 바뀌지 않는 곡선
- *운전하기 좋은 길*
 - *속력과 방향을 급격히 바꿀 필요가 없는 길*



매개변수식 곡선

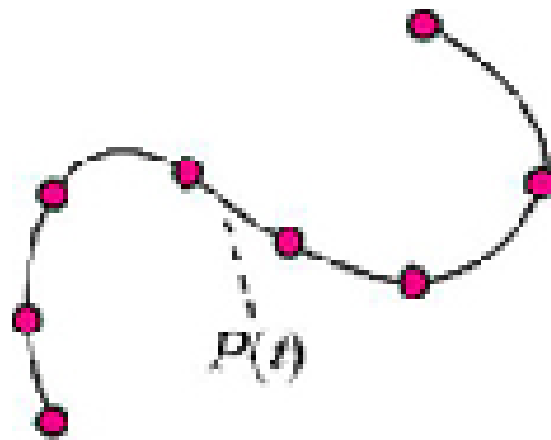
- 매개 변수로 곡선(이동 궤적)을 표현
 - $P = P(t)$
 - x, y, z 를 직접 조작하는 것이 아니라, 매개 변수 t 를 넣어 P 의 좌표값 x, y, z 을 계산하는 방식이다.
- 자동차의 위치를 시간 t 의 함수로 표현
 - 시간 t 를 알면 자동차의 위치를 알 수 있다.



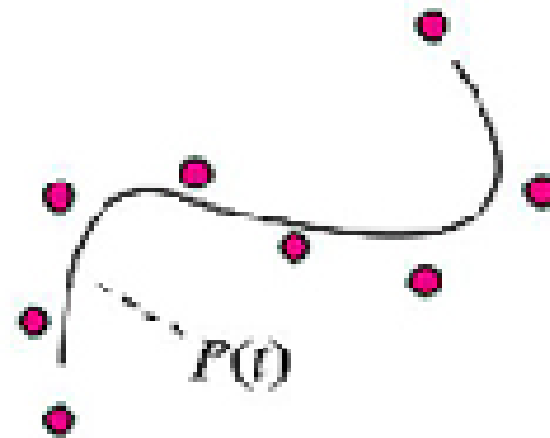


곡선의 정의방법

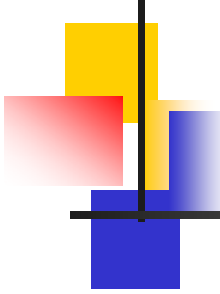
- 보간(interpolation)
- 근사(approximation)



(a) 보간곡선



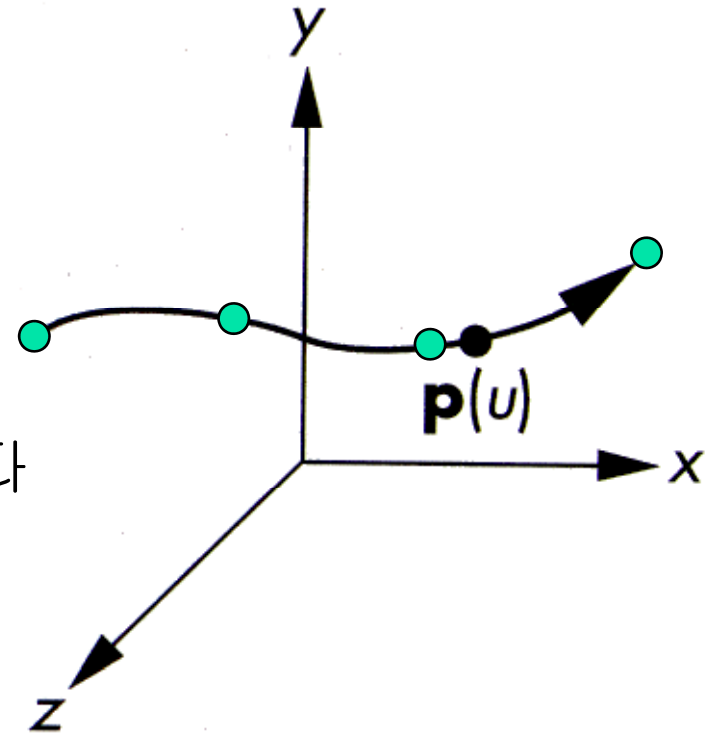
(b) 근사곡선



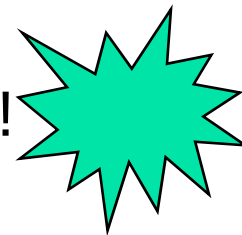
다항식에 의한 보간

$$\mathbf{P} = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1 t + \mathbf{C}_2 t^2 + \mathbf{C}_3 t^3$$

통과점을 조건으로 넣어
연립방정식을 풀어 계수를 구할 수 있다

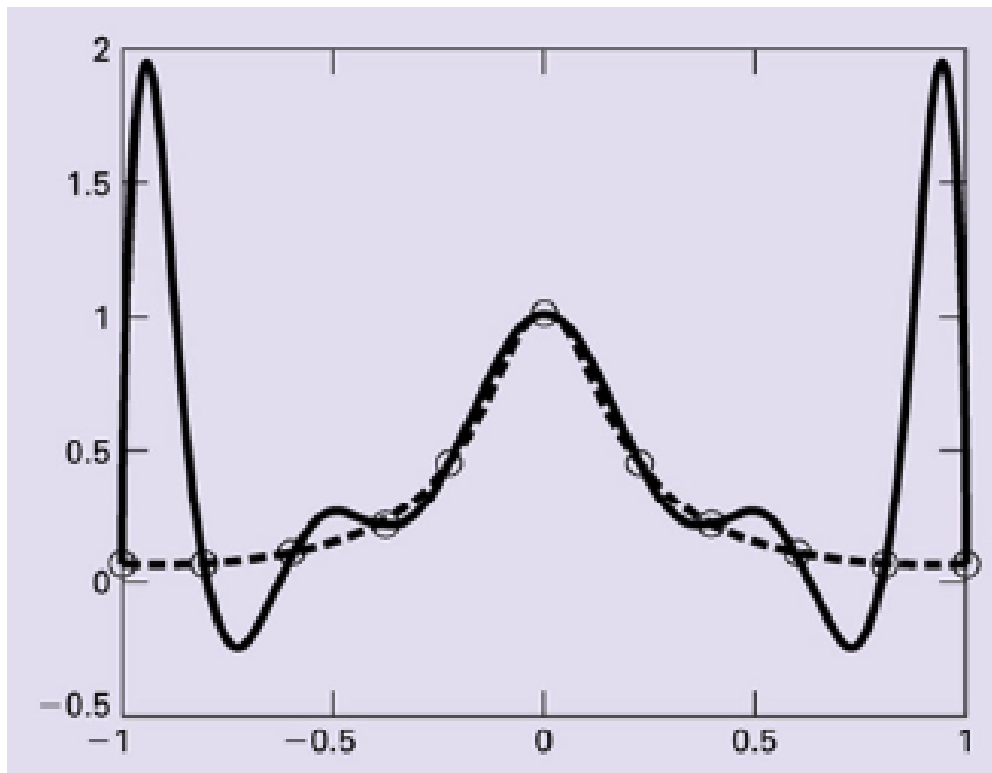


계수와 곡선형상의 직관적 관계 없음!!

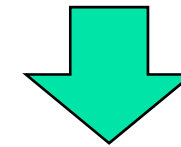


고차다항식의 보간 - 위험성

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{10}x^{10}$$



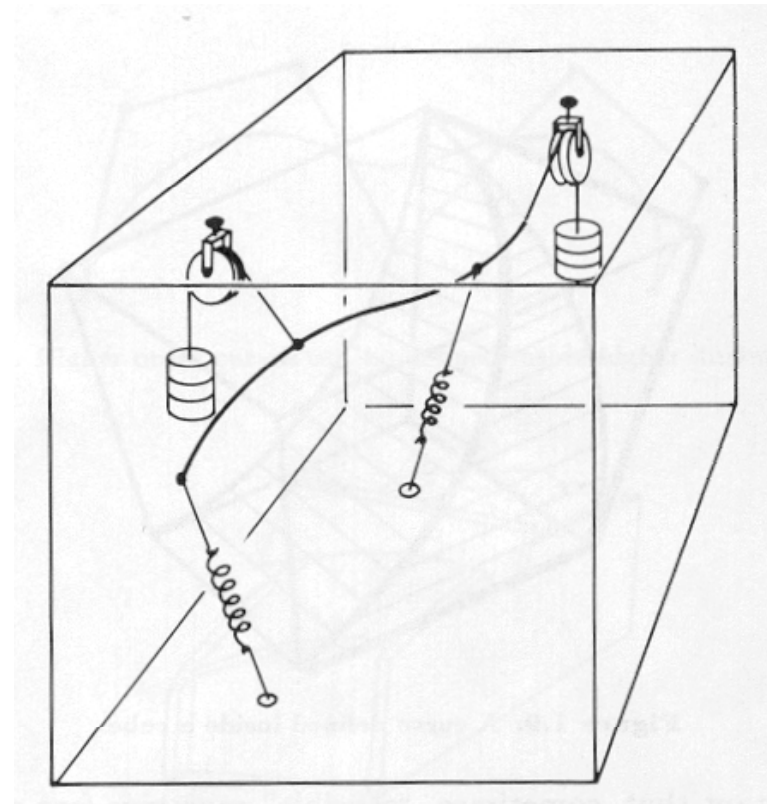
11개의 통과점
10차식으로 보간 가능



- 1) 계산시간 많다
- 2) 원치 않는 진동!!
- 3) 거듭제곱으로 오차 민감

몇 차(degree)가 적당한가 ?

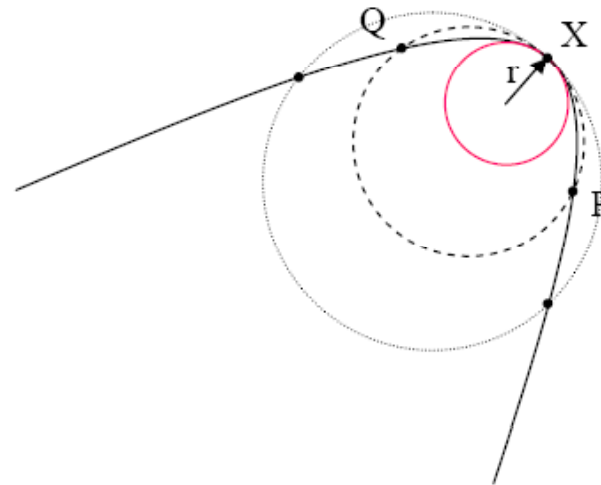
- 2차식 (Quadratic)
- 3차식 (Cubic)
- 고차식



자연의 곡선들 = 3차식

곡률과 곡률반경

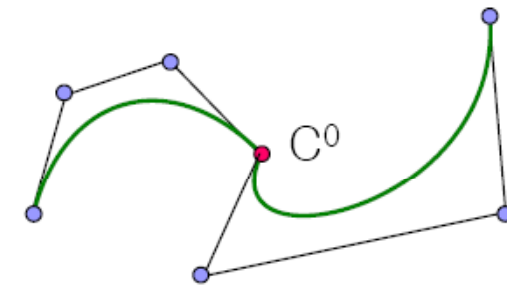
- X는 고정된 점이고
 - P, Q는 움직이는 점
 - X, P, Q가 직선이 아니라면 원이 정의된다.
- P, Q를 X에 무한히 근접시킬 때 얻어지는 원
 - 곡률 원(circle of curvature)
- 그 원의 반경을
 - 곡률 반경(radius of curvature) =
- 그 원이 놓이는 평면을
 - Osculating plane
- $1/r$
 - X에서의 곡률
- 곡률이 커지면
 - 곡률 반경은 작아지고
- 곡률이 작아지면
 - 곡률 반경은 커지고..
- 곡률은 2차 미분으로 계산할 수 있다.



곡선의 연속성

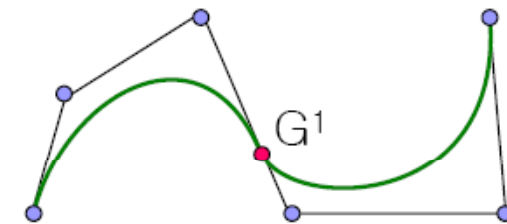
■ Positional Continuity

- 점이 일치
- C^0 , G^0



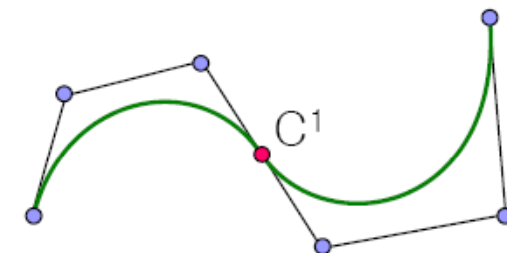
■ Tangential Continuity

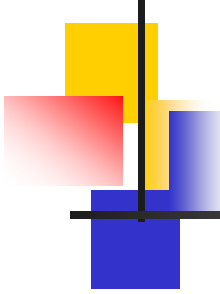
- 접선 벡터가 일치(1차 미분 연속)
- G^1 – 접선 벡터의 방향만 일치
- C^1 – 접선 벡터의 방향과 크기가 일치



■ Curvature Continuity

- 연속곡률이 일치(2차 미분 연속)
- G^2 – 곡률이 일치
- C^2 – 2차 미분 벡터가 일치





대표적 곡선

- Hermite Curve

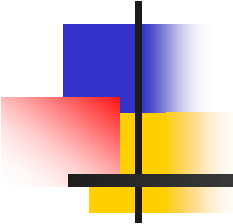
- 곡선 양 끝점에서의 위치와 접선벡터로 정의

- Bezier Curve

- 곡선 양 끝점의 위치와 양 끝점에서의 접선 벡터를 간접적으로 정의하기 위한 두 점(대개 곡선 위의 점이 아님)을 사용하여 정의

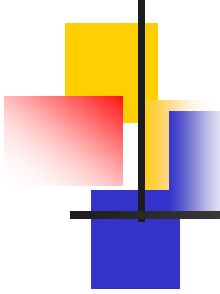
- B-spline Curve

- 곡선 양 끝점에 정확히 매칭하는 것이 아니라 대략적으로 끝점을 정의



Hermite 곡선

정의요소
개형



Hermite Curve

- 3차 곡선의 매개변수형 표현

$$\begin{aligned}x(u) &= a_{0x} + a_{1x}u + a_{2x}u^2 + a_{3x}u^3 \\y(u) &= a_{0y} + a_{1y}u + a_{2y}u^2 + a_{3y}u^3 \\z(u) &= a_{0z} + a_{1z}u + a_{2z}u^2 + a_{3z}u^3\end{aligned} \quad 0 \leq u \leq 1$$

- 3차 곡선의 벡터 표현

$$R(u) = a_0 + a_1u + a_2u^2 + a_3u^3$$

- 3차의 선택 이유

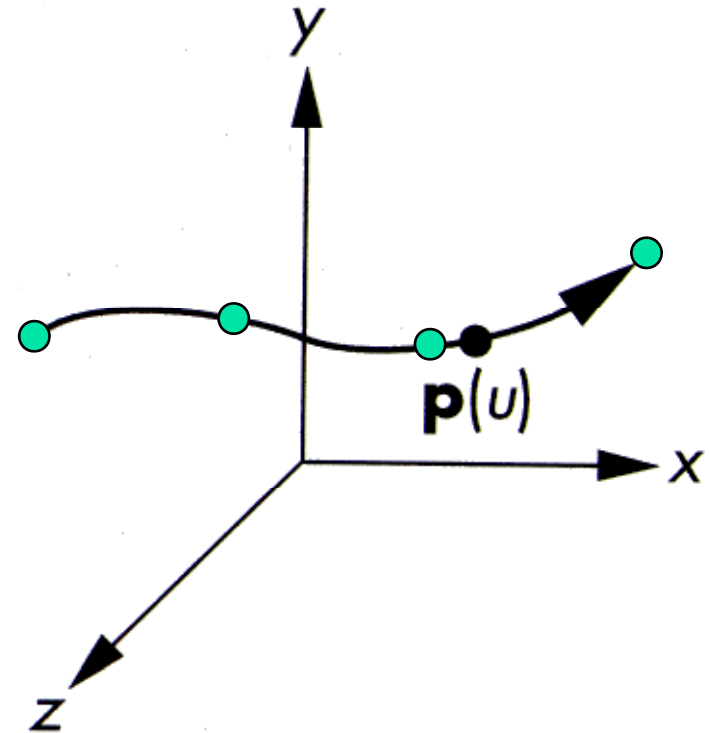
- 곡선을 연결 할 경우 연결 점에서 2차 미분까지 연속 (곡률 변화 없이 연결 가능)

Hermite 곡선 방정식

$$\therefore P(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3$$

$(0 \leq u \leq 1)$: algebraic eq.

- a_0, a_1, a_2, a_3 의
변화에 따른 곡선형상 변화
예측 불가(not intuitive)



CAD 시스템에서 곡선을 조작(manipulate)할 때 불리

Hermite 곡선 방정식 – cont'

- vector coefficient 대신 Boundary condition 을 이용
- P_0, P_1, P_0', P_1' 을 사용 $\Rightarrow$ 식(1)에 대입

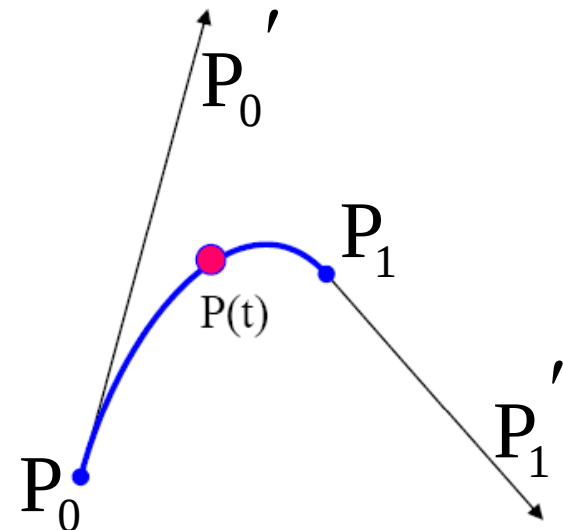
$$P_{(0)} = P_0 = a_0$$

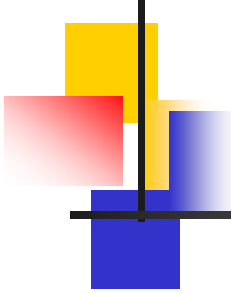
$$P_{(1)} = P_1 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$$

$$P_{(0)}' = P_0' = a_1$$

$$P_{(1)}' = P_1' = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

(2)





Hermite 곡선 방정식 – cont'

- (2)에서 a_0, a_1, a_2, a_3 에 대해 풀면

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= P_0 \\ a_1 &= P_0' \\ a_2 &= -3P_0 + 3P_1 - 2P_0' - P_1' \\ a_3 &= 2P_0 - 2P_1 + P_0' - P_1' \end{aligned} \right] \quad (3)$$

Hermite 곡선 방정식 – cont'

- (3)을 (1)에 대입하면

$$p(u) = \begin{bmatrix} 1-3u^2+2u^3 & 3u^2-2u^3 & u-2u^2+u^3 & -u^2+u^3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{P}_1 \end{bmatrix}}_{\text{geometric coefficients}}$$

↑

Hermite curve equation

- P_0, P_1, P_0', P_1' 의 변화로 곡선의 변화를 어느 정도 예측 가능



Hermite 곡선 방정식 – cont'

- $1-3u^2+2u^3, 3u^2-2u^3, u-2u^2+u^3, -u^2+u^3$
는 P_0, P_1, P_0', P_1' 의 영향을 적당히 섞어 곡
선의 형상을 결정 => blending function

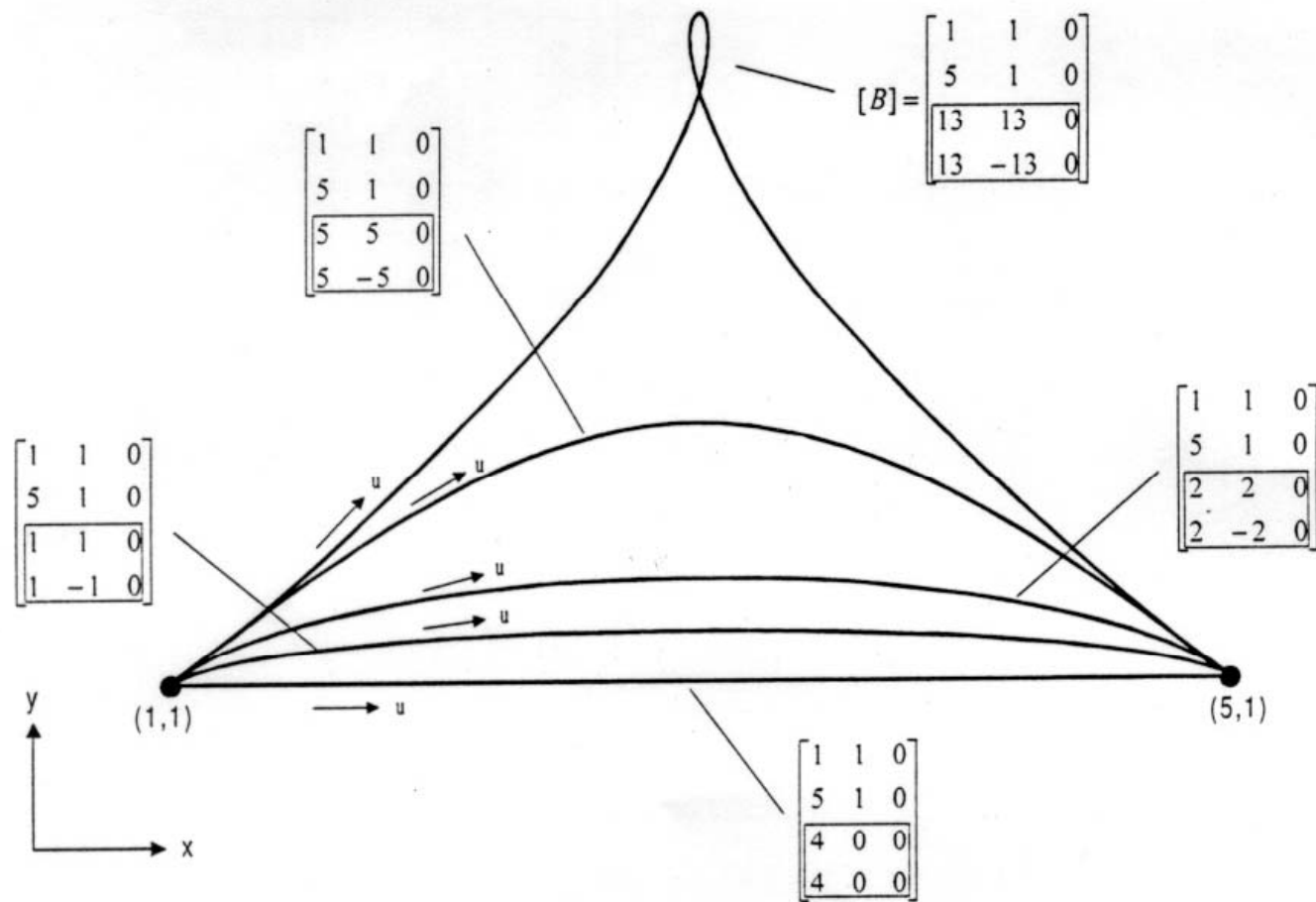
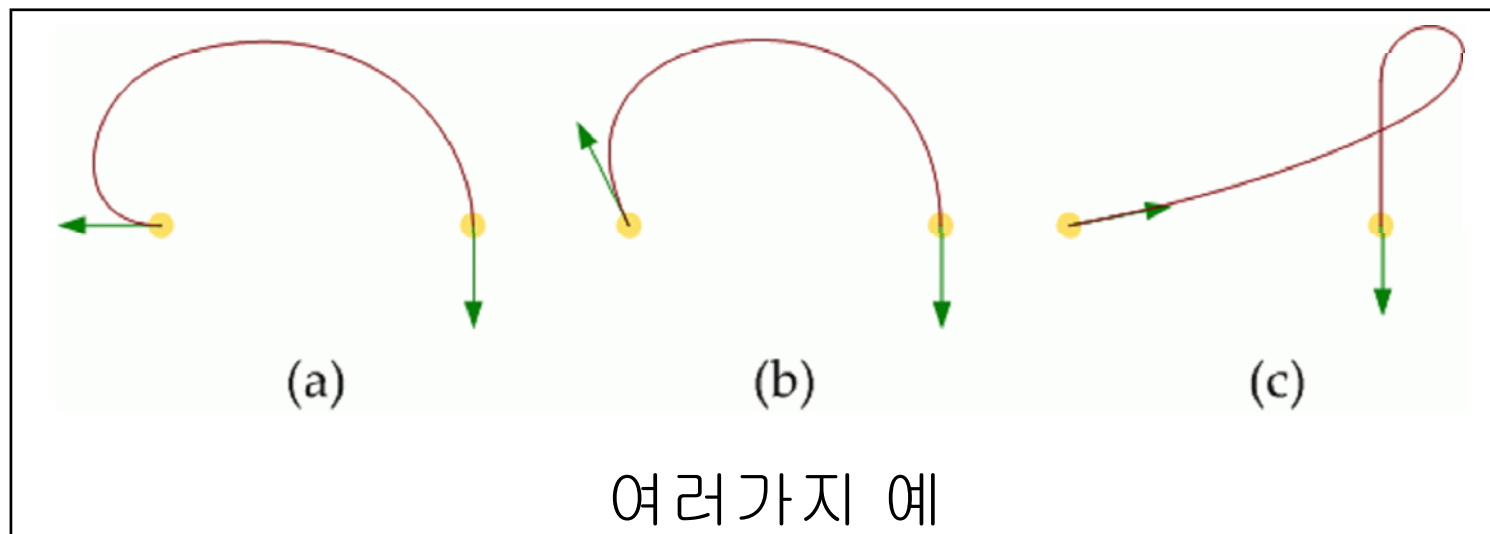
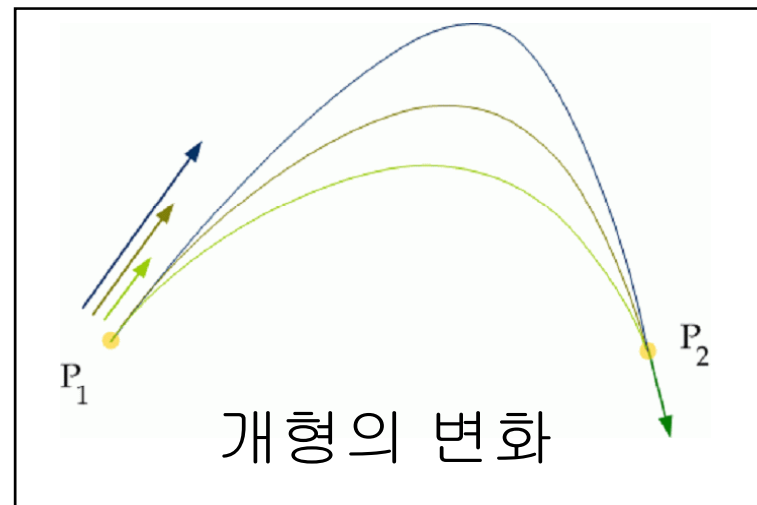
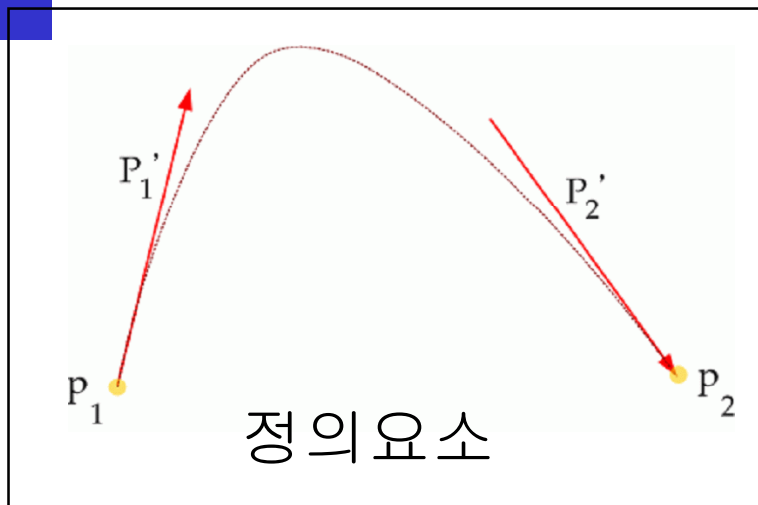


Figure 6.2 Effect of P_0' and P_1' on curve shape

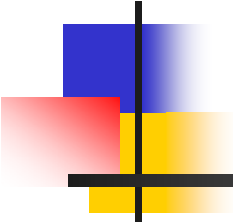
Hermite 곡선 정리





Hermite Curve의 남은 문제점

- 정의 요소가 직관에 완전히 부합하지 않음
- 곡선 segment가 한정되어 있음
- 3차로 제한됨



Bezier 곡선

Control Point
Control Polygon



Bezier 곡선식

- Hermite 곡선식

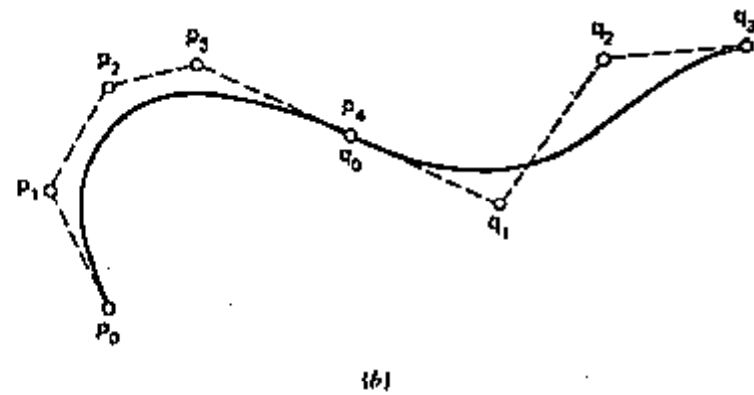
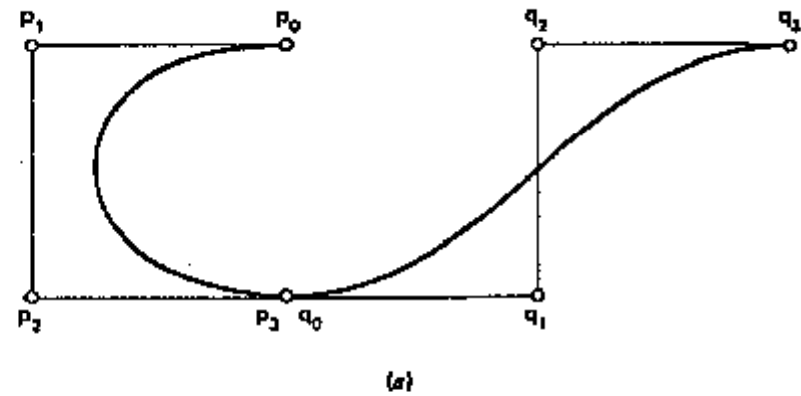
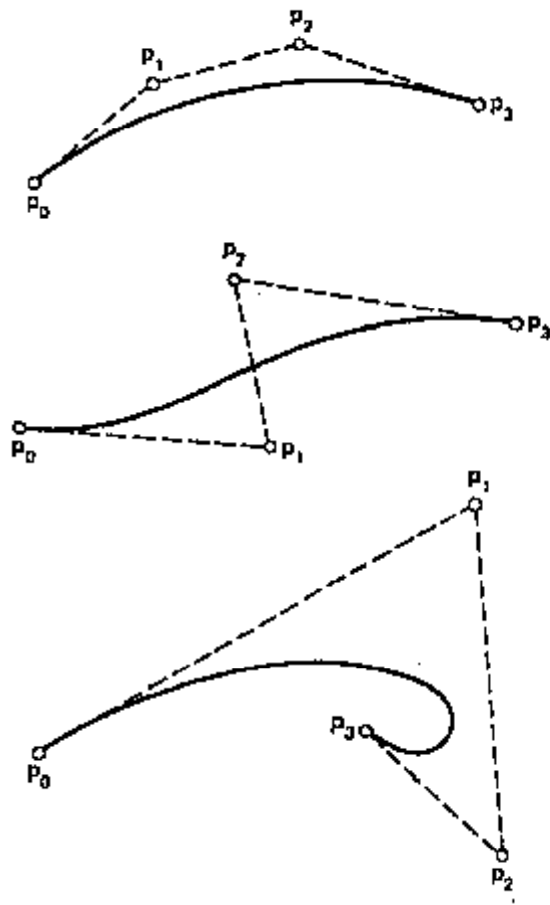
P_0' , P_1' 의 크기와 방향을 변화시켜 designer의 머리 속에 있는 곡선의 형상을 실현하는 것이 쉽지 않음

- Bezier 곡선식

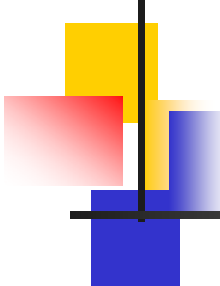
Renault 자동차사의 Bezier가 새로운 곡선식을 제안
곡선을 근사하게 포함하는 다각형을 이용하여 곡선의 형상이 결정되도록 함

control polygon, control point

여러가지 Bezier 곡선



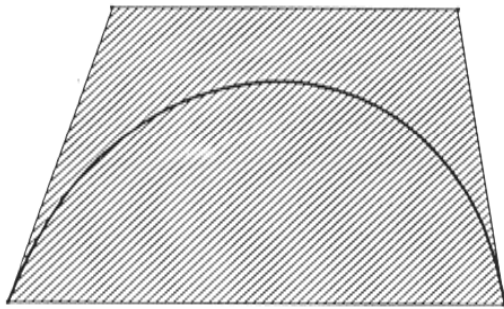
Composite Bezier curves



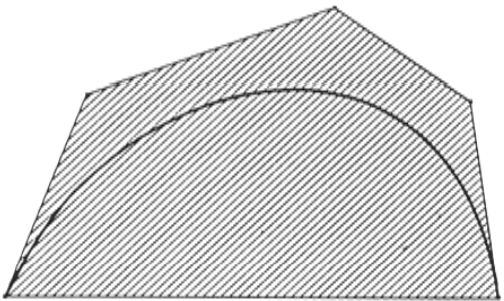
Bezier 곡선식 – cont'

- 생성되는 곡선은 다각형의 시작점과 끝점을 통과
- 다각형의 첫째 선분은 시작점에서의 접선 vector와 같은 방향
- 마지막 선분은 끝점에서의 접선 vector 와 같은 방향
두 개의 Bezier 곡선을 부드럽게 연결하는데 이용되는 성질
- 시작점이나 끝점에서의 n 번 미분 값
그 점을 포함하여 인접한 $(n+1)$ 개의 꼭지점에 의해 결정
두 개의 곡선 연결 시 이용되는 성질
- 곡선은 control point에 의해 정의되는 convex hull(블록 껍질)내에 항상 존재
교차점 계산 시 유용하게 사용되는 성질

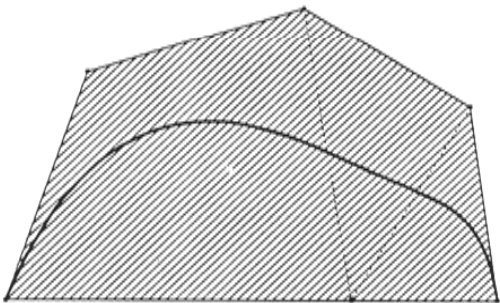
Convex Hull Property



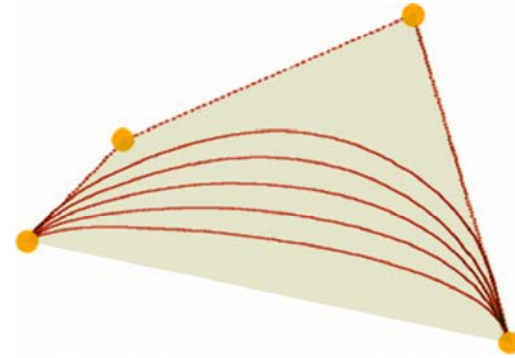
(a)



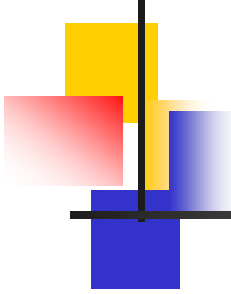
(b)



(c)



Convex hull이 직선이면
곡선은 어떻게 될 것인가 ?



Bezier 곡선식 – cont'

$$p(u) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \mathbf{P}_i \quad (0 \leq u \leq 1)$$



control point

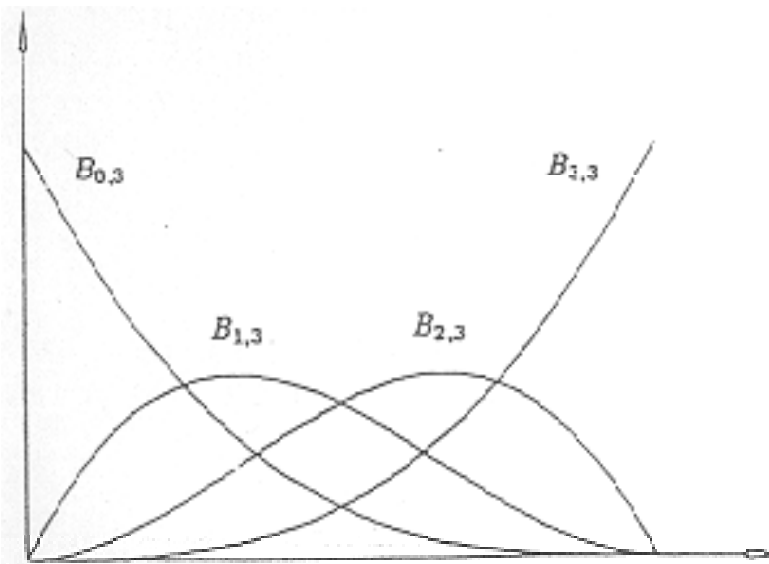


Bezier 곡선식 – cont'

- 조정점의 개수 $(n+1)$ 이면 u^n 이 최고차 항
u 의 n차식
- 조정점의 개수에 의해 curve 의 차수가 결정
- 복잡한 형상을 하나의 Bezier curve로 나타낼 경우
많은 수의 control Point를 사용 -> 차수가 높아진다.
계산의 비효율, 곡선의 oscillation
여러 개의 Bezier 곡선으로 표시해서 해결하는 것이 바람직
- Global modification 성질 (not local modification)
조금씩 수정하면서 원하는 형상을 구현하기에 불편



Bezier curve blending 함수



3차일 경우

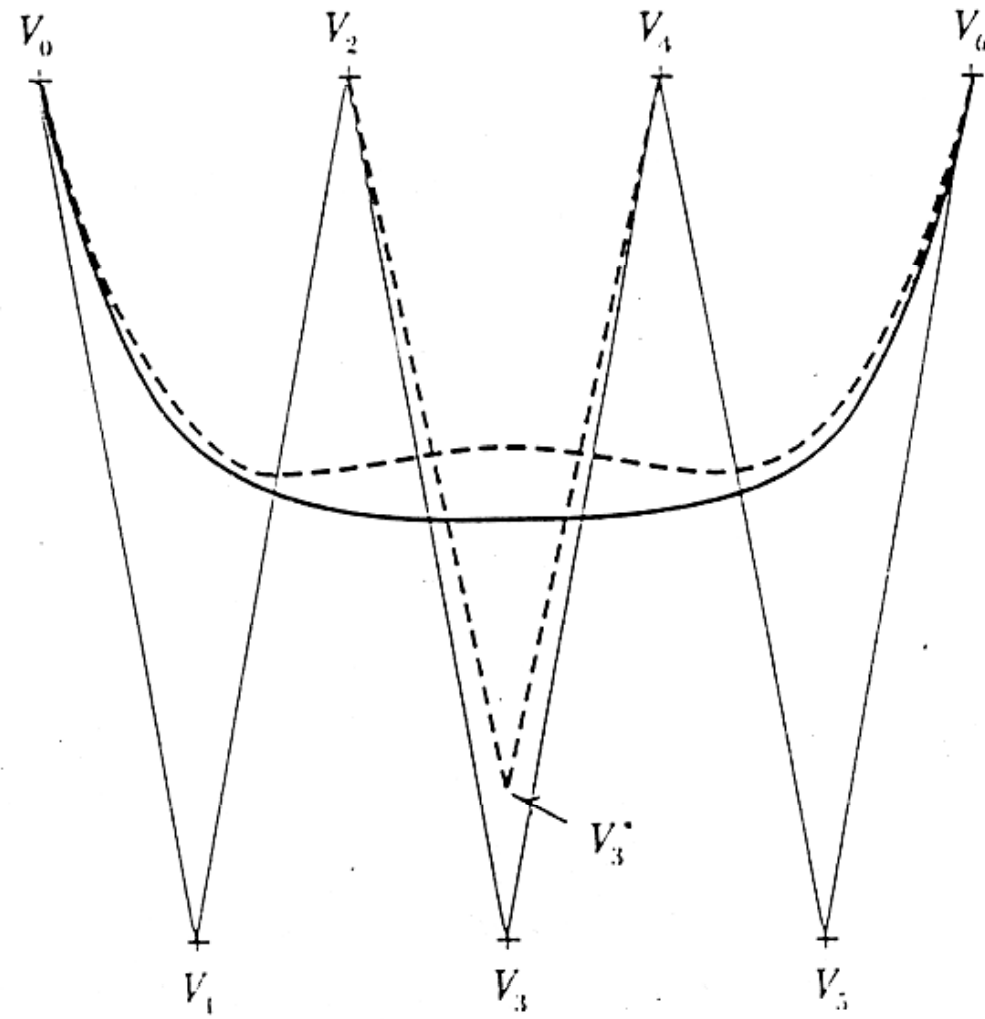
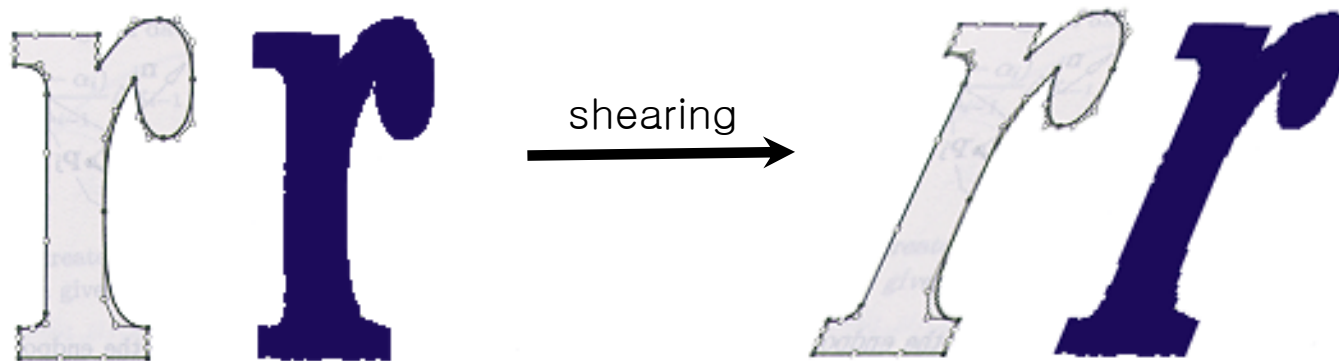
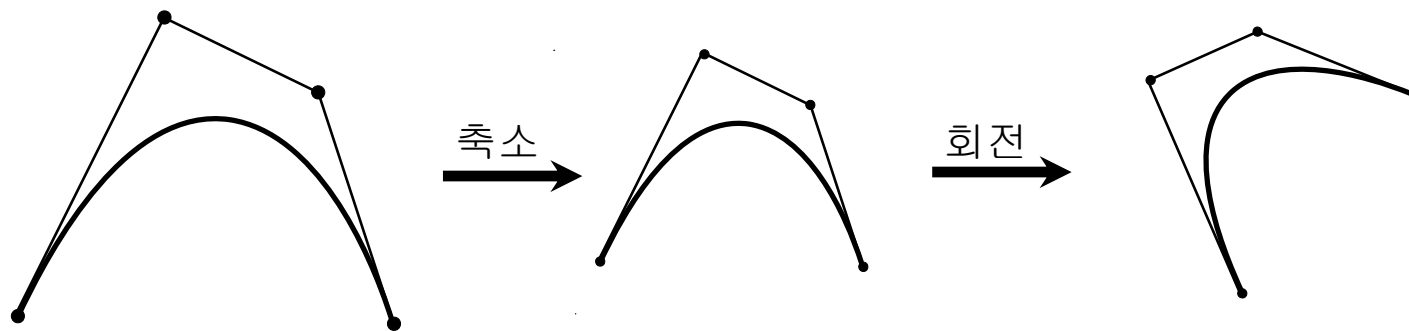


그림 10.22 베지에르 곡선은
국부 조정 특성이 없음. •

Bezier 곡선의 Transform

- Control point를 transformation하면 곡선도 같이 transform



복합 Bezier 곡선

■ Composite Bezier Curve

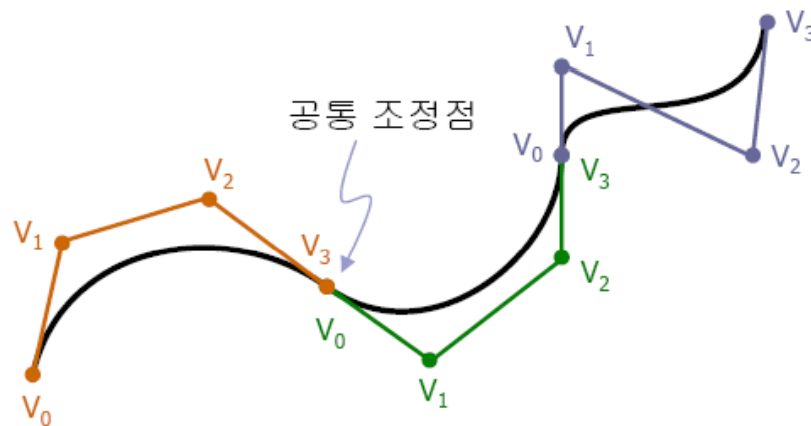
□ 복잡한 곡선을 나타내기 위한 방법

1) 높은 차수의 곡선

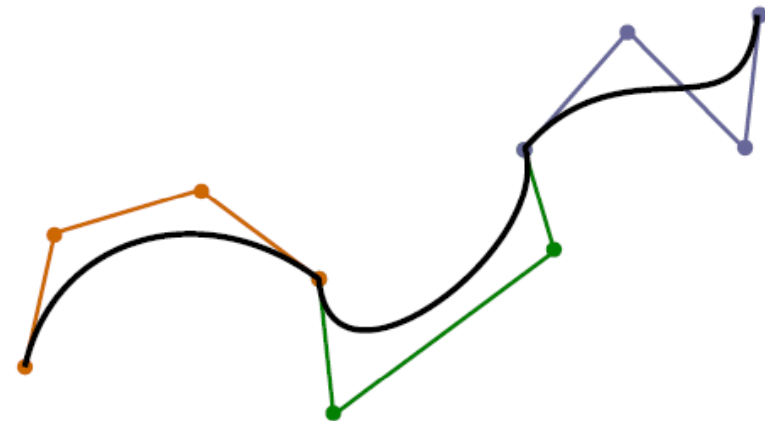
- 국부 조정이 곤란하다. → 조정점을 하나 움직이면 곡선 전체가 변함
- 컴퓨터 연산량이 많아지고 계산 오류가 누적된다.

2) 낮은 차수의 곡선을 여러 개 연결

- 조정점의 중복
- 접선 연속을 위한 추가적 고려

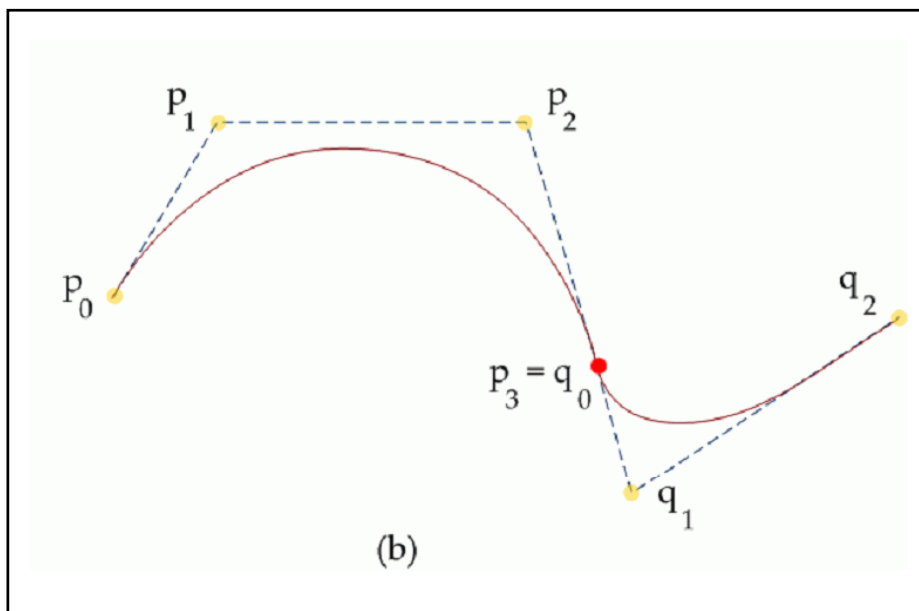


< 접선 연속 복합 베지어 곡선 >

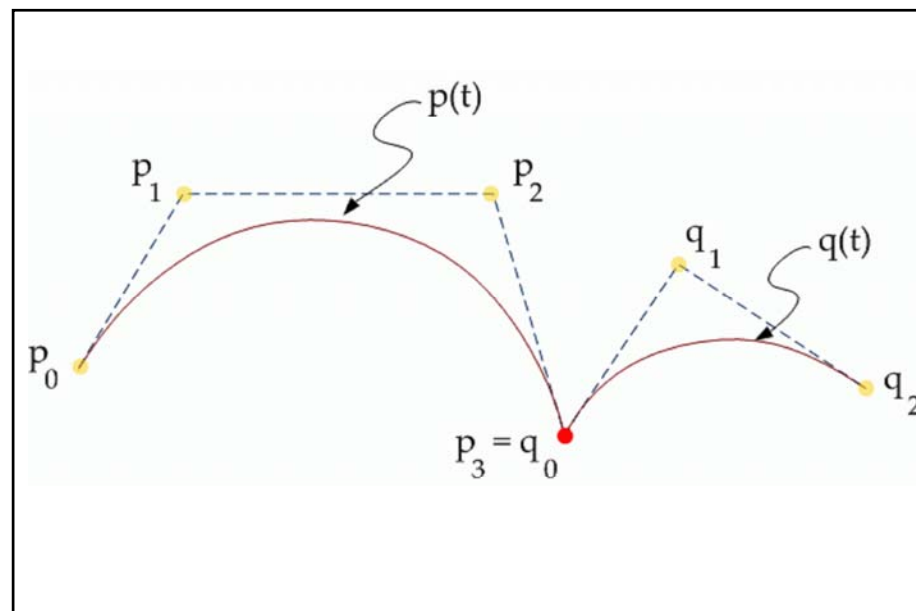


< 접선 불연속 복합 베지어 곡선 >

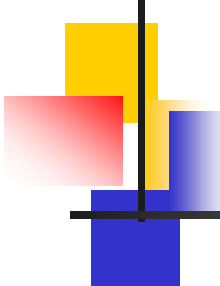
복합 Bezier곡선의 연속성



G1연속
(C0는 만족하지만,
C1까지는 안됨)

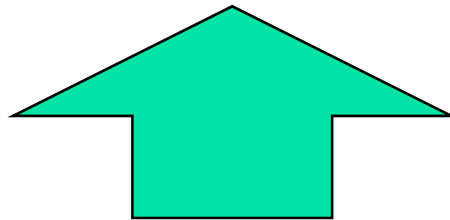


C0연속

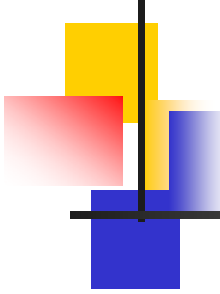


Bezier 곡선의 단점 및 보완책

- 조정 점의 개수와 곡선의 차수가 직결.
모든 조정 점이 곡선의 형상에 영향을 줌.(non-local)
 - 많은 조정 점 사용 → 곡선식의 차수 증가
계산량 증가 및 진동 발생
 - Global Modification 성질 → 곡선의 일부분을 변형시키면 나머지 부분도 예상치 못한 변화가 발생



이것은 Bezier Curve에서 사용된 블렌딩 함수의 성질에 기인

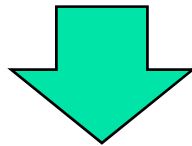


Bezier 곡선의 단점 및 보완책

- 따라서

새로운 성질을 지닌 블렌딩 함수가 필요

- 조정점의 개수가 원하는 차수와 무관하게 지정되어야 함
- 모든 블렌딩 함수는 매개 변수 u 의 전체 범위 중 각각 서로 다른 일정 범위에서만 값을 갖도록 하여, 매개 변수의 일정 범위에 해당되는 곡선 부위에서는 그 범위에서 0이 안되는 블렌딩 함수와 짝이 되는 한정된 개수의 조정점들만 형상에 영향을 줄 수 있어야 한다.



B-Spline Curve



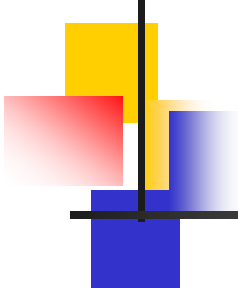
연습문제 1

- 양함수와 음함수의 장단점은?
- ' $6x - 2y + 4 = 0$ '를 양함수 형태로 표현하시오.
- 원점에서 5만큼 떨어져 있고, 법선 벡터가 $(4, 3)$ 인 직선을 음함수 형태로 표현하시오.
- $(2, 3)$ 을 지나고 방향이 $(1, 2)$ 인 직선을 매개변수식으로 표현하시오.
- CAD 시스템에서 매개변수식으로 곡선/곡면을 표현하는 이유는?



연습문제 2

- C^1 연속에 대해 설명하십시오.
- 베지어 곡선의 장점은?
- 곡률에 대해 설명하십시오.



연습문제 3

- 복합곡선과 B-spline 곡선을 비교 설명하시오.
- Non-uniform B-spline의 특성을 설명하시오.
- Rational B-spline의 특성을 설명하시오.
- NURBS는 무엇의 약자인가?